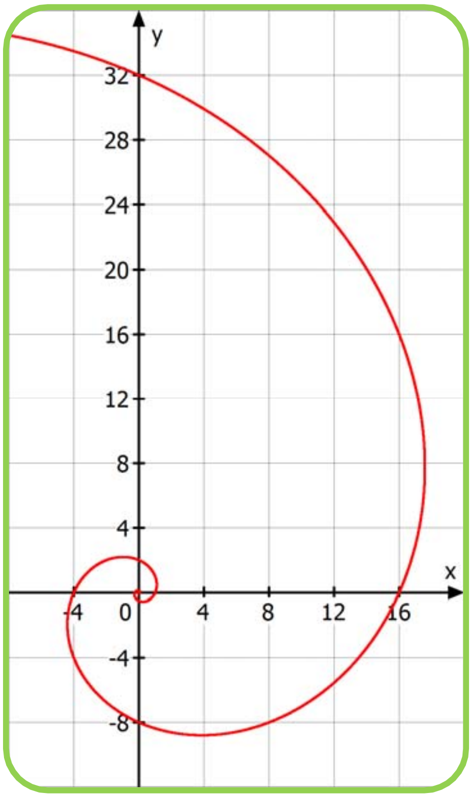
Komplexe Zahlen



Eine logarithmische Spirale in der Gaußschen Zahlenebene:

$$z(t) = 2^{t/2} \cdot e^{i \cdot \pi t/4}$$

Text Nr. 50041

Stand 17. November 2023

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

1 Die komplexe Folge $z_n = (1+i)^n$

Es ist eine Aufgabe für Anfänger, die ersten 8 Glieder dieser komplexen Zahlenfolge zu berechnen. Wir suchen die Normalform und die Polarform der Folgenglieder.

$z_1 = 1+i \qquad |z_1| = \sqrt{2} \qquad \arg(z_1) = \arctan(1) = 45° \triangleq \frac{1}{4}\pi$

$z_2 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i \qquad |z_2| = 2 \qquad \arg(z_2) = 90° \triangleq \frac{1}{2}\pi$

$z_3 = (1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i \qquad |z_3| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

2. Feld: $\arg(z_3) = 180^{O} - \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) = 180^{O} - 45^{O} = 135^{O} \triangleq \frac{3}{4}\pi$

$z_4 = (1+i)^4) = (2i)^2 = -4 \qquad |z_4| = 4 \qquad \arg(z_4) = 180^{O} \triangleq \pi$

$z_5 = (1+i)^5 = z_2 \cdot z_3 = 2i \cdot (-2+2i) = -4-4i \qquad |z_5| = \sqrt{16+16} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

3. Feld: $\arg(z_5) = 180^{O} + \arctan(1) = 180^{O} + 45^{O} = 225^{O} \triangleq \frac{5}{4}\pi$

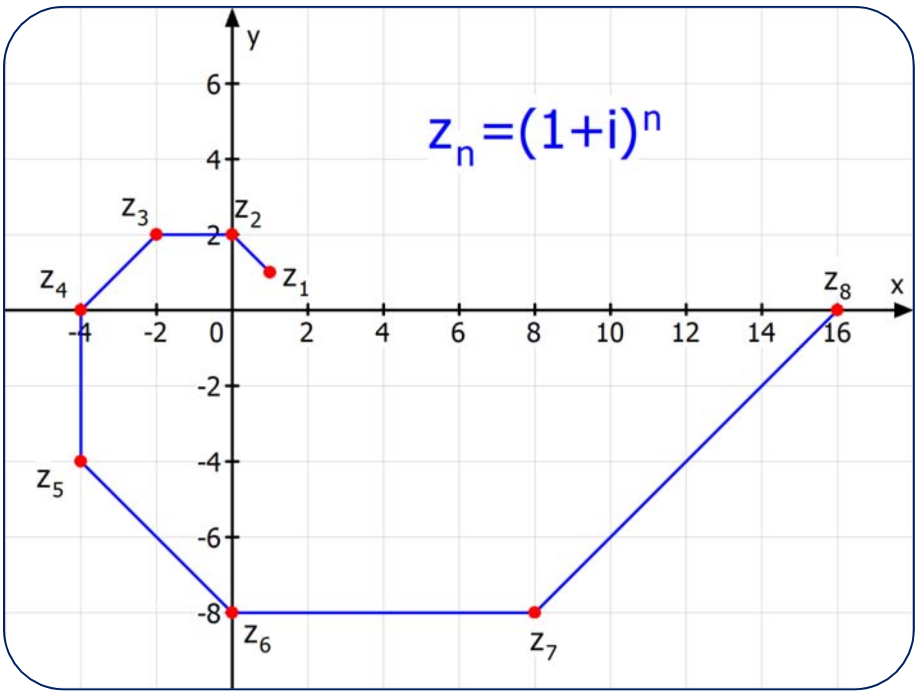
$z_6 = (1+i)^6 = z_4 \cdot z_2 = -4 \cdot 2i = -8i \qquad |z_6| = 8$, $\qquad \arg(z_6) = 270^{O} \triangleq \frac{3}{2}\pi$

$z_7 = (1+i)^7 = z_4 \cdot z_3 = -4(-2+2i) = 8-8i \qquad |z_7| = \sqrt{64+64} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$

4. Feld: $\arg(z_7) = 360^{O} - \arctan(1) = 360^{O} - 45^{O} = 315^{O} \triangleq \frac{7}{4}\pi$

$z_8 = (1+i)^8 = z_4 \cdot z_4 = (-4)^2 = 16 \qquad |z_8| = 16 \qquad \arg(z_6) = 360^{O} = 0^{O} \triangleq 2\pi$

Das Schaubild der Zahlenfolge ergibt eine Spirale, die der logarithmischen Spirale ähnlich ist.



2 Eine logarithmische Spirale

In Abschnitt 1 hieß die Folge $z_n = (1+i)^n$

Jetzt ersetzen wir die Zahlenfolge n im Exponenten durch die Variable $t \in \mathbb{R}$ und erhalten die

Funktion $z(t) = (1+i)^t$

Nun ersetzen wir die Basis durch ihre Polarform:

$$b = 1+i \quad \Rightarrow \quad |b| = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \arg(b) = \arctan(1) = 45^\circ \mathrel{\hat{=}} \tfrac{1}{4}\pi$$

Dann ist $b = \sqrt{2} \cdot E(45^\circ)$ oder im Bogenmaß $b = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \pi/4}$

Daraus folgt: $$z(t) = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \pi/4}\right)^t$$

$$z(t) = 2^{t/2} \cdot e^{i \cdot \pi/4 \cdot t}$$

Zur Darstellung dieser Spirale mit Mathe-Grafix schreibe ich die Gleichung in die trigonometrische

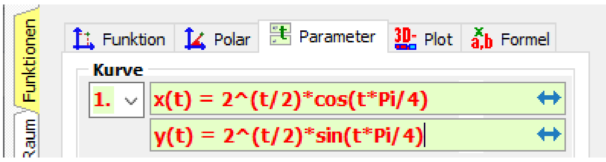
Form um: $$z(t) = 2^{t/2} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}t\right)\right)$$

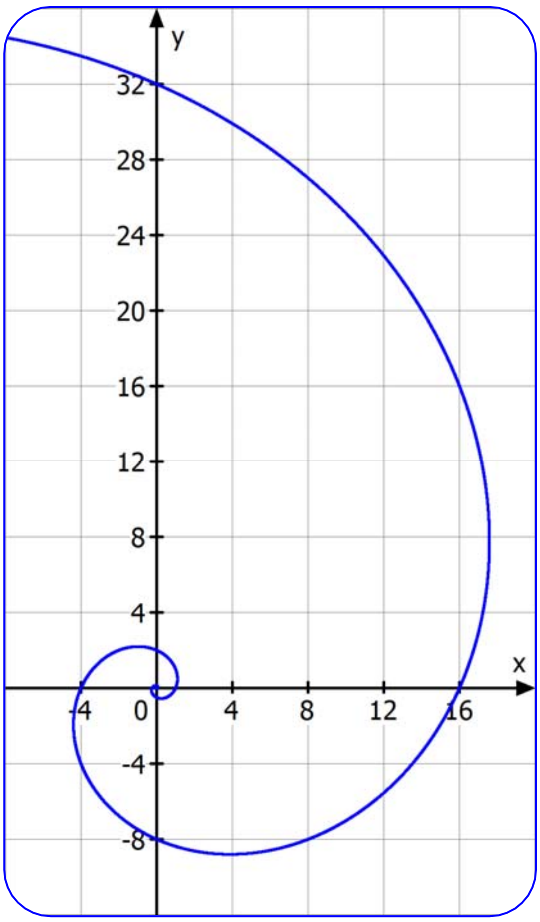
$$x(t) + i \cdot (t) = 2^{t/2} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}t\right)\right)$$

Dann erstelle ich durch Koeffizientenvergleich ein Gleichungssystem:

$$\begin{Bmatrix} x(t) = 2^{t/2} \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) \\ y(t) = 2^{t/2} \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}t\right) \end{Bmatrix}$$

Dieses System kann man so als Parameterdarstellung der Spirale eintippen





und erhält dann dieses Schaubild:

Wichtig ist dabei das t-Intervall.

Ich hatte $-20 \le t \le 20$.

Wie verhält sich diese Kurve für $t \to -\infty$ und für $t \to \infty$?

Verhalten für $t \to -\infty$:

Der Betrag der Funktionswerte ist $\left|z(t)\right| = \left|2^{t/2}\right| \cdot \left|e^{i\cdot\pi/4\cdot t}\right| = 2^{t/2}$, denn $\left|e^{i\cdot\pi/4\cdot t}\right| = 1$.

Man erkennt das besser in der trigonometrischen Darstellung: $z(t) = 2^{t/2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)$:

$\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right| = \sqrt{\cos^2(...) + \sin^2(...)} = 1$

Nimmt man also $t = -1000$, dann ist $\left|z(-1000)\right| = 2^{-500} = \frac{1}{2^{500}} \approx 0$

Ergebnis: Für $t \to -\infty$ nähert sich der Spirale immer mehr dem Ursprung, also der komplexen Zahl 0 an, erreicht sie aber nie, weil $\left|z(t)\right| = 2^{t/2} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Verhalten für $t \to \infty$:

Wegen $\left|z(t)\right| = 2^{t/2}$ wird der Abstand der Spiralpunkte von 0 immer größer und geht gegen Unendlich.

$z(t) = 2^{t/2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)$ zeigt, dass – wenn t um 8 zunimmt, das Argument um 2π zunimmt. Beispiel: Es sei $\varphi(t) = \frac{\pi}{4} \cdot t$. Beginnen wir bei t = 4:

$\varphi(4) = \pi \xrightarrow{+\Delta t=8} \varphi(12) = 3\pi \xrightarrow{+\Delta t=8} \varphi(20) = 5\pi \cdots$

Also ist $\Delta t = 8$ eine „Art Periode“ der Funktion, nach der die Spirale eine Umdrehung gemacht hat,

Ergebnis: Die Spirale macht für $t \to \infty$ unendlich viele „Umrundungen“ der Zahl 0 und entfernt sich dabei beliebig weit, also gegen Unendlich.

3 Andere logarithmische Spiralen

Unsere Spirale hat die Basis b = (1+i) verwendet. Was passiert, wenn man eine andere Basis wählt?

Beginnen wir mit der Basis b = i und der Funktion $z(t) = i^t$. Sie hat den Betrag $|z(t)| = |i|^t = 1$.

Das bedeutet, dass sich mit zunehmendem t die Kurvenpunkte auf dem Einheitskreis um den Ursprung bewegen. Das Schaubild ist also keine Spirale.

Die allgemeine logarithmische Spirale benötig also eine Basis $|b| \neq 1$:

$$z(t) = k \cdot b^t .$$

Im **Text 54135** werden Spiralen im Bereich der reellen Zahlen untersucht.
Dort werden logarithmische Spiralen ab Seite 13 untersucht, bis hin zur Bogenlänge mit Integral.